**Soluzioni Tutorato di Statistica 1 del 04/03/2010**
**Docente: Prof.ssa Enza Orlandi**
**Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco**

**Esercizio 1.**
$\{X_i\}_{i=1}^n$ una successione di v.a. indipendenti con funzione di densità:
$f_X(x,\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3} 1_{[0,\theta]}(\text{x})$
$Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$
$f_{Y_n} = \frac{d}{dy} F_{Y_n}$
$F_{Y_n} = P(Y_n \leq y) = P(max\{X_1, ..., X_n\} \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) =$
$P(X_1 \leq y)...P(X_n \leq y) = [P(x \leq y)]^n$
$P(x \leq y) = \int_0^y \frac{3x^2}{\theta^3} dx = \frac{y^3}{\theta^3} 1_{[0,\theta]}(y)$
$F_{Y_n} = \frac{y^{3n}}{\theta^{3n}}$ quindi $f_{Y_n} = \frac{3ny^{3n-1}}{\theta^{3n}} 1_{[0,\theta]}(y)$

**Esercizio 2.**
$X$ e $Y$ hanno una funzione di densitá di probabilità congiunta:
$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2} xy 1_{(0,x)}(y) 1_{(0,2)}(x)$
$f_X(x) = \int \frac{1}{2} xy 1_{(0,x)}(y) 1_{(0,2)}(x) dy = \frac{1}{2} x 1_{(0,2)}(x) \int_0^x y dy = \frac{1}{4} x^3 1_{(0,2)}(x)$
$f_Y(y) = \int \frac{1}{2} xy 1_{(0,x)}(y) 1_{(0,2)}(x) dx = \int \frac{1}{2} xy 1_{(0,2)}(y) 1_{(y,2)}(x) dx =$
$\frac{1}{2} y \int_y^2 x dx = \frac{1}{4} y(4 - y^2) 1_{(0,2)}(y)$
Poichè $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ le due variabili non sono indipendenti.

**Esercizio 3.**
$f_X(x) = 2xe^{-x^2} 1_{(0,+\infty)}(x)$; $Y = X^2$
$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$.
$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(0 \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} 2xe^{-X^2} = 1 - e^{-y}$
allora $f_Y(y) = e^{-y} 1_{(0,+\infty)}(y)$ quindi $Y \sim Exp(1)$
Un altro modo per procedere è calcolando la fgm:
$E(e^{ty}) = E(e^{tx^2}) = \int_0^{+\infty} e^{tx^2} 2xe^{-x^2} dx = \frac{-1}{1-t} \int_0^{+\infty} -(1-t) 2xe^{x^2(1-t)} dx = \frac{1}{1-t}$
quindi $Y \sim \Gamma(1,1) \sim Exp(1)$

**Esercizio 4.**
Siano $X_1$ e $X_2$ varibili casuali indipendenti. $X_1 e X_2 \sim N(0,1)$
Dal teorema 5.13 sappiamo che:
$f_{Y_1,Y_2} = |J| f_{X_1,X_2}(g_1^{-1}(y_1,y_2), g_2^{-1}(y_1,y_2)) 1_D(y_1,y_2)$ dove $X_1 = g_1^{-1}(Y_1,Y_2)$ e
$X_2 = g_1^{-1}(Y_1,Y_2)$
$Y_1 = X_1^2 + X_2^2$ e $Y_2 = X_1/X_2$ da cui ricaviamo $X_1 = Y_2 \sqrt{\frac{Y_1}{1+Y_2^2}}$ e
$X_2 = \sqrt{\frac{Y_1}{1+Y_2^2}}$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \partial x_1/\partial y_2 \\ \partial x_2/\partial y_1 & \partial x_2/\partial y_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{y_2}{2(1-y_2^2)\sqrt{\frac{y_1}{1+y_2^2}}} & \sqrt{\frac{y_1}{1+y_2^2}} - \frac{y_1 y_2^2}{\sqrt{\frac{y_1}{1+y_2^2}}(1+y_2^2)^2} \\ \frac{1}{2(1+y_2^2)\sqrt{\frac{y_1}{1+y_2^2}}} & \frac{-y_1 y_2}{\sqrt{\frac{y_1}{1+y_2^2}}(1+y_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

quindi $|J| = \frac{-1}{2(1+y_2^2)}$ e $|J| \neq 0$ sse $y_2 \neq \pm 1$ da cui
$D = \{y_1, y_2 : y_2, y_1 \in R^+\}$
Ora calcoliamo $f_{X_1,X_2} = f_{X_1} f_{X_2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x_1^2/2 + x_2^2/2)}$ sostituendo in $f_{X_1,X_2}$ il tutto otteniamo:
$f_{Y_1,Y_2} = \frac{-1}{2(1+y_2^2)} e^{-y_1/2} 1_D(y_1, y_2)$
$f_{Y_1} = \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2(1+y_2^2)} e^{-y_1/2} dy_2 = \frac{-1}{2} e^{-y_1/2}$
$f_{Y_2} = \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2(1+y_2^2)} e^{-y_1/2} dy_1 = \frac{-1}{1+y_2^2}$
Poichè $f_{Y_1,Y_2} = f_{Y_1} f_{y_2}$ le due variabili sono indipendenti.

**Esercizio 5.**

Prendere un numero a caso nella circonferenza vuol dire che tutti i punti sono delle variabili uniformi e dunque
$f_{X,Y} = c$. Se si ragiona pensando che $f_{X,Y}$ è il volume di un cilindro di base la circonferenza di raggio $r = R$ e altezza $c$, si ottiene
$\int \int f_{X,Y} dxdy = \pi R^2 c = 1$ quindi $c = \frac{1}{\pi R^2}$

$$f_{X,Y} = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & se x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$f_X(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \frac{2}{\pi R} \sqrt{R^2 - x^2}$
Ora calcoliamo $P(x^2 + y^2 \leq a^2)$ per $a < R$.
$P(x^2 + y^2 \leq a^2) = \frac{\pi a^2}{\pi R^2}$
$D = \sqrt{x^2 + y^2}$
$f_D(a) = \frac{d}{da} F_D(a)$
$F_D(a) = P(D \leq a) = \frac{a^2}{R^2}$ allora $f_D(a) = \frac{2a}{R^2}$
$E(D) = \int_0^R \frac{2a^2}{R^2} da = \frac{2}{3} R$